§ 7. СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

Теорема 1. Если одна из декартовых осей координат, например Oz (рис. 31), является главной осью инерции для точки O, а две другие оси Ox и Oy — любые, то два центробежных момента инерции, содержащих индекс главной оси инерции Oz, обращаются в нуль, т. е. $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$.

Главная ось инерции Oz является осью симметрии эллипсоида инерции. Поэтому каждой точке эллипсоида, например $M(O, y, z)$, соответствует симметричная относительно этой оси точка $M'(O, -y, z)$. Подставляя в уравнение эллипсоида инерции (27) последовательно координаты этих точек, получим

$$J_y y^2+J_z z^2-2J_{yz}yz=1; \quad J_y(-y)^2+J_z z^2-2J_{yz}(-y)z=1.$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$-4J_{yz}yz=0.$$

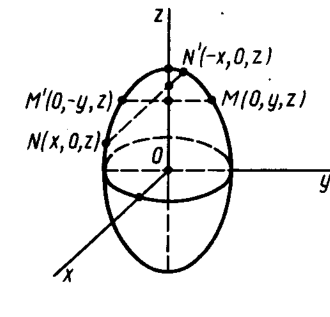

Рис. 31

Так как всегда можно выбрать точки, для которых y и z отличны от нуля, то $J_{yz}=0$.

Аналогичные рассуждения для двух симметричных относительно оси Oz точек $N(x, O, z)$ и $N'(-x, O, z)$ приводят к заключению, что $J_{xz}=0$. В аналитической геометрии при исследовании уравнений поверхностей

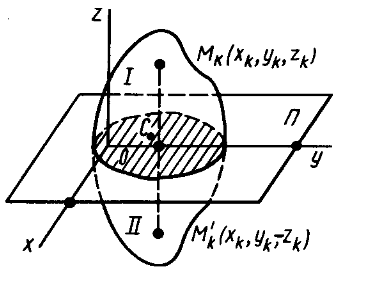

Рис. 32

второго порядка доказывается обратное утверждение, что если $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$, то ось Oz есть главная ось. Таким образом, обращение в нуль центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} является необходимым и достаточным условием, чтобы ось Oz была главной осью инерции для точки O.

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то для любой точки, лежащей в этой плоскости, одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие главные оси инерции расположены в этой плоскости.

Для доказательства теоремы выберем в плоскости симметрии П точку O и в ней оси прямоугольной системы координат $Oxyz$, причем ось Oz направим перпендикулярно плоскости симметрии (рис. 32). Тогда каждой точке тела $M_k(x_k, y_k, z_k)$ массой m_k соответствует симметричная относительно плоскости П точка $M'_k(x_k, y_k, -z_k)$ с такой же массой. Координаты точек M_k и M'_k отличаются только знаком у координат z_k.

Для центробежного момента инерции J_{yz} имеем

$$J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=\sum_{(I)} m_k y_k z_k+\sum_{(II)} m_k y_k(-z_k)=0,$$

так как часть тела (I), соответствующая точкам с положительными координатами z_k, одинакова с частью тела (II), у которой точки имеют такие же координаты z_k, но со знаком минус. Аналогично доказывается, что

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=0.$$

Так как центробежные моменты инерции J_{yz} и J_{xz} обращаются в нуль, то ось Oz есть главная ось инерции для точки O. Другие две главные оси инерции перпендикулярны оси Oz и, следовательно, расположены в плоскости симметрии.

Центр масс однородного симметричного тела находится в плоскости симметрии. Поэтому одна из главных центральных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие расположены в этой плоскости.

Доказанная теорема справедлива и для неоднородного тела, имеющего плоскость материальной симметрии.

Теорема 3. Если однородное тело имеет ось симметрии или неоднородное тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Теорема доказывается аналогично предыдущей. Для каждой точки тела M_k с положительными координатами x_k, y_k, z_k

и массой m_k существует симметричная относительно оси точка с такой же массой и такими же по величине, но отрицательными координатами $-x_k$, $-y_k$, $+z_k$, если осью симметрии является ось Oz. Тогда

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=\sum_{(I)} m_k x_k z_k+\sum_{(II)} m_k(-x_k)z_k=0,$$

так как суммы по симметричным относительно оси частям тела (I) и (II) отличаются друг от друга только знаком у координат x_k.

Аналогично доказывается, что $J_{yz}=0$.

Таким образом, ось Oz является главной осью инерции для любой точки, расположенной на оси симметрии тела. Она есть главная центральная ось инерции, так как центр масс находится на оси симметрии.

Теорема 4. Главные оси инерции для точки O, расположенной на главной центральной оси инерции, параллельны главным центральным осям инерции (рис. 33).

Выберем в точке O главной центральной оси инерции Cz систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, взаимно параллельных главным центральным осям инерции $Cxyz$. Тогда координаты точки тела M_k в двух системах осей координат будут связаны между собой формулами параллельного переноса осей

$$x'_k=x_k; \quad y'_k=y_k; \quad z'_k=z_k-h,$$

где $h=OC$. Используя эти формулы, вычисляем центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$ и $J_{x'y'}$. Имеем

$$J_{y'z'}=\sum_{k=1}^{N} m_k y'_k z'_k=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k-h\sum_{k=1}^{N} m_k y_k=J_{yz}-hMy_C,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=J_{yz}, \quad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k=My_C,$$

где M — масса тела; y_C — координата центра масс относительно системы координат $Cxyz$.

Аналогично получаем

$$J_{z'x'}=J_{zx}-hMx_C; \quad J_{x'y'}=J_{xy}.$$

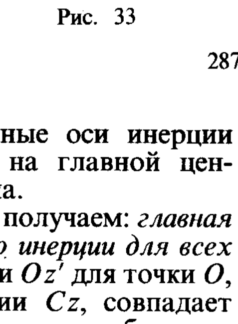

Рис. 33

Если C — центр масс системы, то $x_C=0$ и $y_C=0$. Для главных центральных осей инерции центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.

$$J_{yz}=0; \quad J_{zx}=0; \quad J_{xy}=0.$$

Используя полученные формулы при этих условиях, имеем:

$$J_{y'z'}=0; \quad J_{z'x'}=0; \quad J_{x'y'}=0.$$

Следовательно, оси Ox', Oy', Oz' есть главные оси инерции для произвольной точки O, расположенной на главной центральной оси инерции Cz. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы в качестве следствия получаем: *главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех своих точек*. Действительно, главная ось инерции Oz' для точки O, лежащей на главной центральной оси инерции Cz, совпадает с этой осью. Главная ось инерции таким свойством не обладает. Главные оси инерции для точки O_1, расположенной на главной оси инерции точки O, не параллельны главным осям инерции для этой точки. Они в общем случае повернуты относительно этих осей.